

HOJA DE PROBLEMAS 4

Innovación y el Modelo de Romer

Crecimiento Económico CUNEF

1 Función de acumulación de ideas

En el modelo de Romer, el conocimiento o stock de ideas A_t crece endógenamente a través de la inversión en investigación y desarrollo (I+D). La función de acumulación de ideas viene dada por:

$$\dot{A}_t = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^\phi$$

donde $\dot{A}_t = \partial A_t / \partial t$ es la creación de nuevas ideas, L_{Rt} es el número de investigadores dedicados a I+D, $\theta > 0$ es un parámetro de productividad de la investigación, $\lambda > 0$ mide los rendimientos del trabajo investigador, y ϕ mide los rendimientos del stock de conocimiento existente.

A diferencia de los bienes físicos, las ideas tienen características especiales que las hacen fundamentales para el crecimiento económico.

- (a) Explica por qué las ideas son no rivales pero potencialmente excluibles. Proporciona un ejemplo concreto de cada propiedad y explica por qué esta distinción es importante para el crecimiento económico.
- (b) Considera la función de acumulación de ideas $\dot{A}_t = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^\phi$. Interpreta económicamente cada uno de los parámetros θ , λ y ϕ . ¿Qué implica $\phi > 0$? ¿Y $\phi < 1$?
- (c) A partir de la función de acumulación de ideas, deriva la expresión para la tasa de crecimiento del stock de ideas:

$$g_A = \frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

- (d) Supón $\theta = 0.05$, $L_R = 100$ investigadores, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, y el stock inicial de ideas es $A_0 = 400$. Calcula la tasa de crecimiento inicial g_A .

2 Dinámica de la productividad y estado estacionario

En el modelo de Romer, una fracción $s_R \in (0, 1)$ de la población trabaja en I+D, de modo que $L_{Rt} = s_R L_t$, donde L_t es la población total que crece a tasa constante $g_L > 0$. Sustituyendo en la función de acumulación de ideas:

$$\dot{A}_t = \theta (s_R L_t)^\lambda A_t^\phi = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^\phi$$

La tasa de crecimiento del stock de ideas es entonces:

$$g_A = \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{A_t^{1-\phi}}$$

Valores numéricos: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $g_L = 0.02$ (2% anual).

- (a) Partiendo de la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^{\phi-1}$, deriva la condición que debe cumplirse en la senda de crecimiento equilibrado (BGP) para que g_A sea constante en el tiempo.
- (b) Demuestra que en la senda de crecimiento equilibrado la tasa de crecimiento de las ideas es:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$$

- (c) Con los valores numéricos dados, calcula g_A^{BGP} . ¿Cuál es la tasa de crecimiento del PIB per cápita a largo plazo?
- (d) ¿Cómo depende g_A^{BGP} de los parámetros θ (productividad de la investigación) y s_R (fracción de investigadores)? ¿Qué implica esto para las políticas de I+D?

3 Efectos de escala en el crecimiento

Una de las predicciones clave del modelo de Romer es que el tamaño de la economía (medido por la población L_t) afecta las tasas de crecimiento a largo plazo. Esto contrasta con el modelo de Solow, donde el crecimiento de largo plazo es independiente del tamaño poblacional.

Recordemos que en el modelo de Romer:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$$

mientras que en Solow, g_A es exógeno (no depende de variables endógenas).

Valores numéricos: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$.

- (a) En el modelo de Solow, ¿el tamaño de la población L_t afecta la tasa de crecimiento de largo plazo del PIB per cápita? ¿Y en el modelo de Romer? Explica la diferencia fundamental entre ambos modelos.
- (b) Explica por qué en Romer se cumple $g_y^{BGP} = g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$, mientras que en Solow $g_y^{BGP} = g_A$ (exógeno).
- (c) Considera dos países idénticos excepto en su tasa de crecimiento poblacional: el País A tiene $g_L = 0.01$ (1% anual) y el País B tiene $g_L = 0.03$ (3% anual). Con $\lambda = 1$ y $\phi = 0.5$, calcula la tasa de crecimiento del PIB per cápita a largo plazo en cada país.
- (d) Según el modelo de Romer, ¿el nivel de la población L_t afecta el nivel del stock de ideas A_t en la senda de crecimiento equilibrado? Utiliza la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^{\phi-1}$ para explicar tu respuesta.

4 Estática comparativa — aumento en investigadores

Consideremos una economía que, en el momento $t = 0$, experimenta una política que aumenta permanentemente la fracción de trabajadores dedicados a I+D de $s_R = 0.05$ a $s_R = 0.10$.

La tasa de crecimiento del stock de ideas viene dada por:

$$g_A = \theta s_R^\lambda L^\lambda A^{\phi-1}$$

Para el impacto inmediato, usa $\theta = 0.1$, $L_0 = 1,000$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A_0 = 100$. Para el largo plazo, usa además $g_L = 0.02$.

- (a) Supón que s_R aumenta de 0.05 a 0.10. Utilizando la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L^\lambda A^{\phi-1}$, ¿qué sucede con g_A inmediatamente después del cambio en $t = 0$?
- (b) ¿Qué sucede con g_A en el largo plazo cuando la economía alcanza la nueva senda de crecimiento equilibrado? Compara el efecto de corto plazo (inmediato) con el efecto de largo plazo.
- (c) Con los valores numéricos dados, calcula:
 - La tasa de crecimiento inicial g_A con $s_R = 0.05$ (antes del cambio)
 - La nueva tasa de crecimiento g_A inmediatamente después del aumento a $s_R = 0.10$
 - La tasa de crecimiento de largo plazo g_A^{BGP} (usa $g_A^{BGP} = 2g_L$ con $g_L = 0.02$)
- (d) Interpreta económicamente: ¿El aumento en la intensidad de I+D tiene efectos permanentes o temporales sobre la tasa de crecimiento? ¿Sobre el nivel del PIB per cápita?

5 Decisión de inversión en I+D

En el modelo de Romer, las empresas deciden si invertir en I+D comparando el coste de crear una nueva idea con el valor presente de los beneficios que genera.

El coste de crear una nueva idea es el salario que hay que pagar a los investigadores necesarios para generar una idea adicional:

$$F = \frac{w_t}{\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}}$$

donde w_t es el salario y $\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}$ es la productividad marginal de un investigador adicional.

El valor de una nueva idea es el valor presente de los beneficios monopolísticos que genera:

$$V = \frac{\pi}{r - g_\pi}$$

donde π son los beneficios del monopolio, r es la tasa de interés, y g_π es la tasa de crecimiento de los beneficios.

La condición de entrada libre en I+D implica que en equilibrio: $V = F$.

Valores numéricos: $w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$, $r = 0.10$.

- (a) El coste de crear una nueva idea es $F = \frac{w_t}{\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}}$. Utilizando la función de acumulación de ideas $\dot{A} = \theta L_{Rt}^\lambda A^\phi$, deriva la expresión:

$$F = \frac{w_t}{\lambda \theta L_{Rt}^{\lambda-1} A^\phi}$$

- (b) El valor de una innovación es $V = \frac{\pi}{r-g_\pi}$. Si los beneficios monopolísticos representan el 10% del PIB ($\pi = 0.1Y$) y crecen a la misma tasa que el PIB ($g_\pi = g_Y = 0.04$), y la tasa de interés es $r = 0.10$, calcula la ratio V/π (el múltiplo de beneficios que vale una innovación).
- (c) La condición de entrada libre es $V = F$. Con los valores numéricos dados ($w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$), calcula:
- El coste de crear una nueva idea: F
 - El valor de una innovación: V (supón $\pi = 10$ a partir del apartado anterior)
 - ¿Se cumple la condición de entrada libre $V = F$?
- (d) Supón que el salario w aumenta. ¿Qué sucede con el coste de innovar F ? ¿Cómo se ajusta la economía? (Pista: considera qué pasa con L_R , A , o ambos para restaurar la condición $V = F$).