

HOJA DE PROBLEMAS 3 — SOLUCIONES

El Modelo de Solow

Crecimiento Económico

CUNEF

1 Función de producción Cobb-Douglas

En el modelo de Solow, la producción agregada viene dada por una función Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

donde K_t es el capital, L_t el trabajo, A_t la tecnología (eficiencia del trabajo), y $\alpha \in (0, 1)$ es la participación del capital en la renta.

Las empresas, que operan en competencia perfecta, maximizan beneficios $\Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t L_t$, donde r_t es la tasa de retorno del capital y w_t el salario.

Supongamos $K_t = 1,000$, $A_t = 5$, $L_t = 200$, $\alpha = 1/3$.

- (a) Demuestra que la función de producción tiene rendimientos constantes a escala: si multiplicamos K_t y L_t por una constante $\lambda > 0$, la producción se multiplica por λ .

Solución:

Multiplicamos ambos factores por $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} F(\lambda K_t, \lambda L_t) &= (\lambda K_t)^\alpha (A_t \lambda L_t)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^\alpha K_t^\alpha \cdot \lambda^{1-\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha+(1-\alpha)} K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \\ &= \lambda Y_t \end{aligned}$$

Al multiplicar capital y trabajo por λ , la producción se multiplica exactamente por λ . ✓

- (b) Calcula las productividades marginales de capital y trabajo:

$$\text{PMgK} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}, \quad \text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}$$

Obtén las expresiones generales y evalúa numéricamente.

Solución:

Productividad marginal del capital:

$$\text{PMgK} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}$$

Productividad marginal del trabajo:

$$\text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1 - \alpha) K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t}$$

Calculamos primero Y_t :

$$Y_t = 1,000^{1/3} \times (5 \times 200)^{2/3} = 1,000^{1/3} \times 1,000^{2/3} = 1,000$$

Evaluación numérica:

$$\text{PMgK} = \frac{1}{3} \times \frac{1,000}{1,000} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

$$\text{PMgL} = \frac{2}{3} \times \frac{1,000}{200} = \frac{10}{3} \approx 3.333$$

- (c) En competencia perfecta, cada factor se remunera según su productividad marginal ($r_t = \text{PMgK}$, $w_t = \text{PMgL}$). Demuestra que la participación del capital en la renta total es constante e igual a α :

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha$$

y que la participación del trabajo es $1 - \alpha$. ¿Con qué Hechos de Kaldor es consistente este resultado?

Solución:

Participación del capital:

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{\text{PMgK} \times K_t}{Y_t} = \frac{\alpha Y_t / K_t \times K_t}{Y_t} = \alpha \quad \checkmark$$

Participación del trabajo:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{\text{PMgL} \times L_t}{Y_t} = \frac{(1 - \alpha) Y_t / L_t \times L_t}{Y_t} = 1 - \alpha \quad \checkmark$$

Además, se verifica que toda la renta se distribuye entre factores: $r_t K_t + w_t L_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) Y_t = Y_t$.

Este resultado es consistente directamente con el Hecho de Kaldor #3: la participación de los factores en la renta es constante (la del trabajo es $1 - \alpha$ y la del capital es α), independientemente de los niveles de K , L o A .

(d) Calcula Y_t y el PIBpc $y_t = Y_t/L_t$ con los valores numéricos dados.

Solución:

$$Y_t = 1,000 \quad (\text{calculado arriba})$$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{1,000}{200} = 5$$

2 Acumulación de capital y estado estacionario

La ecuación de acumulación de capital del modelo de Solow es:

$$\dot{K}_t = s Y_t - \delta K_t$$

donde $s \in (0, 1)$ es la tasa de ahorro (exógena), $\delta > 0$ es la tasa de depreciación, y $\dot{K}_t = \partial K_t / \partial t$.

Definimos el capital por unidad de trabajo efectivo como:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

La población y la tecnología crecen a tasas constantes y exógenas g_L y g_A , respectivamente.

Valores numéricos: $\alpha = 1/3$, $s = 0.20$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$.

(a) Demuestra que la tasa de crecimiento del capital se puede escribir como:

$$g_K = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s \frac{Y_t}{K_t} - \delta = s k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$$

Solución:

Dividimos $\dot{K}_t = s Y_t - \delta K_t$ entre K_t :

$$g_K = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s \frac{Y_t}{K_t} - \delta$$

Ahora expresamos Y_t/K_t en función de k_t :

$$\frac{Y_t}{K_t} = \frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{K_t} = K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha-1} = k_t^{\alpha-1} = k_t^{-(1-\alpha)}$$

Por tanto:

$$g_K = s k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$$

- (b) La tasa de crecimiento de k_t es $g_k = g_K - g_A - g_L$. En el estado estacionario, $g_k = 0$, de modo que $g_K = g_A + g_L$. Usando esta condición, deriva la expresión del capital de estado estacionario:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Solución:

En el estado estacionario: $g_k = 0 \Rightarrow g_K = g_A + g_L$.

Sustituyendo en la expresión de g_K :

$$s(k^{SS})^{-(1-\alpha)} - \delta = g_A + g_L$$

$$s(k^{SS})^{-(1-\alpha)} = g_A + g_L + \delta$$

$$(k^{SS})^{-(1-\alpha)} = \frac{g_A + g_L + \delta}{s}$$

$$(k^{SS})^{1-\alpha} = \frac{s}{g_A + g_L + \delta}$$

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- (c) Calcula k^{SS} con los valores numéricos dados.

Solución:

$$k^{SS} = \left(\frac{0.20}{0.02 + 0.01 + 0.05} \right)^{\frac{1}{1-1/3}} = \left(\frac{0.20}{0.08} \right)^{3/2} = 2.5^{3/2}$$

$$2.5^{3/2} = 2.5 \times \sqrt{2.5} = 2.5 \times 1.581 \approx 3.95$$

$$k^{SS} \approx 3.95$$

- (d) El PIBpc en la senda de crecimiento equilibrado (BGP) es:

$$y_t^{BGP} = A_t (k^{SS})^\alpha$$

¿De qué parámetros depende el nivel de y_t^{BGP} ? ¿Y su tasa de crecimiento a largo plazo?

Solución:

$$y_t^{BGP} = A_t (k^{SS})^\alpha = A_t \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

El nivel depende de A_t (tecnología), s (ahorro), g_A , g_L , δ y α . Es creciente en s y A_t , y decreciente en g_L y δ .

La tasa de crecimiento a largo plazo es únicamente:

$$g_y^{BGP} = g_A$$

Solo depende del progreso tecnológico. Ni el ahorro, ni la población, ni la depreciación afectan la tasa de crecimiento de largo plazo.

3 Senda de crecimiento equilibrado (BGP)

Partimos de los resultados del Ejercicio 2. En la senda de crecimiento equilibrado (BGP), el capital por unidad de trabajo efectivo es constante ($k_t = k^{SS}$).

Recuerda que el PIBpc se puede descomponer como:

$$y_t = A_t k_t^\alpha \implies g_y = g_A + \alpha g_k$$

y que el retorno del capital es $r_t = \alpha Y_t / K_t$.

(a) Demuestra que en la BGP:

- $g_y^{BGP} = g_A$ (el PIBpc crece a la tasa del progreso tecnológico)
- $g_Y^{BGP} = g_A + g_L$ (el PIB agregado crece por tecnología y población)

Solución:

En la BGP, $k_t = k^{SS}$ (constante), por tanto $g_k = 0$.

PIBpc:

$$g_y^{BGP} = g_A + \alpha \times 0 = g_A \quad \checkmark$$

PIB agregado: Dado que $Y_t = y_t \times L_t$:

$$g_Y^{BGP} = g_y^{BGP} + g_L = g_A + g_L \quad \checkmark$$

(b) Demuestra que la tasa de retorno del capital es constante en la BGP ($g_r^{BGP} = 0$). (Pista: expresa r_t en función de k_t .)

Solución:

Expresamos r_t en función de k_t :

$$r_t = \alpha \frac{Y_t}{K_t} = \alpha k_t^{-(1-\alpha)}$$

En la BGP, $k_t = k^{SS}$ es constante, por tanto r_t es constante:

$$g_r^{BGP} = 0 \quad \checkmark$$

- (c) Verifica que los resultados de los apartados (a) y (b) son consistentes con los cuatro Hechos de Kaldor. Indica explícitamente a qué Hecho corresponde cada resultado.

Solución:

- Hecho #1 (crecimiento positivo y constante del PIBpc): $g_y^{BGP} = g_A > 0$ y constante. ✓
- Hecho #2 (retorno del capital sin tendencia): $g_r^{BGP} = 0$, el retorno es constante. ✓
- Hecho #3 (participación del trabajo constante): $w_t L_t / Y_t = 1 - \alpha$, constante por construcción Cobb-Douglas. ✓
- Hecho #4 (inversión/PIB constante): $I_t / Y_t = s Y_t / Y_t = s$, constante. ✓

El modelo de Solow es consistente con los cuatro Hechos de Kaldor.

- (d) Con los valores del Ejercicio 2 ($g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$), ¿a qué tasa crece el PIBpc en la BGP? ¿A qué tasa crece el PIB agregado? ¿En cuántos años se duplica el PIBpc?

Solución:

$$g_y^{BGP} = g_A = 0.02 = 2\%$$

$$g_Y^{BGP} = g_A + g_L = 0.02 + 0.01 = 0.03 = 3\%$$

Tiempo de duplicación del PIBpc (Regla del 70):

$$t^* = \frac{70}{2} = 35 \text{ años}$$

4 Estática comparativa — ahorro y dinámica de transición

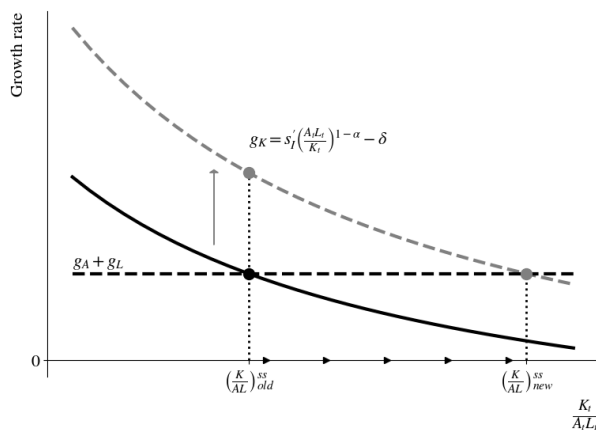


Figura 1: Efecto sobre g_K

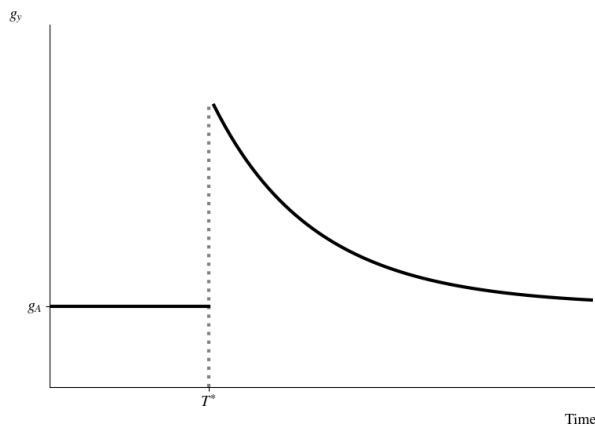


Figura 2: Transición del PIBpc

Recuerda que:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g_y = g_A + \alpha (g_K - g_A - g_L)$$

Usa los valores: $\alpha = 1/3$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$. Inicialmente $s = 0.20$ y aumenta a $s' = 0.30$.

- (a) Observando la Figura 1, explica por qué el aumento de s a s' desplaza la curva g_K hacia arriba. ¿Qué ocurre con g_K en el instante inmediatamente posterior al cambio, si la economía partía de k^{SS} ?

Solución:

La curva $g_K = s k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$ se desplaza verticalmente porque el primer término se multiplica por un s mayor ($s' > s$). Para cada nivel de k_t , la tasa de crecimiento del capital es ahora mayor.

En el instante posterior al cambio, la economía aún está en k^{SS} (el capital no cambia instantáneamente). Pero ahora:

$$g_K(k^{SS}) = s' (k^{SS})^{-(1-\alpha)} - \delta > s (k^{SS})^{-(1-\alpha)} - \delta = g_A + g_L$$

Es decir, $g_K > g_A + g_L$, lo que implica que el capital por trabajo efectivo comienza a crecer ($g_k > 0$).

- (b) En la Figura 2, ¿por qué el PIBpc crece temporalmente por encima de g_A durante la transición? ¿Qué componente de $g_y = g_A + \alpha g_k$ lo explica?

Solución:

Durante la transición, k_t está aumentando ($g_k > 0$), por lo que:

$$g_y = g_A + \alpha g_k > g_A$$

El componente $\alpha g_k > 0$ representa el crecimiento de transición: la acumulación de capital por encima de la tasa de equilibrio genera un crecimiento adicional del PIBpc. A medida que k_t se acerca a $k^{SS'}$, $g_k \rightarrow 0$ y $g_y \rightarrow g_A$ (la productividad marginal del capital decreciente hace que g_K caiga progresivamente).

- (c) Calcula k^{SS} y $k^{SS'}$ (antes y después del cambio en s). ¿En qué porcentaje aumenta el capital de estado estacionario?

Solución:

$$k^{SS} = \left(\frac{0.20}{0.08} \right)^{3/2} = 2.5^{3/2} = 2.5 \times 1.581 \approx 3.95$$

$$k^{SS'} = \left(\frac{0.30}{0.08} \right)^{3/2} = 3.75^{3/2} = 3.75 \times \sqrt{3.75} = 3.75 \times 1.936 \approx 7.26$$

Aumento porcentual:

$$\frac{7.26 - 3.95}{3.95} \times 100 \approx 83.8\%$$

El capital de estado estacionario aumenta un $\approx 84\%$.

- (d) ¿Cambia la tasa de crecimiento del PIBpc a largo plazo? Explica por qué las diferencias en tasas de ahorro pueden explicar diferencias en *niveles* de PIBpc entre países, pero no diferencias en *tasas de crecimiento* a largo plazo.

Solución:

No. La tasa de crecimiento del PIBpc a largo plazo sigue siendo:

$$g_y^{BGP} = g_A = 2\%$$

independientemente de s . El aumento de s eleva el *nivel* de k^{SS} y, por tanto, de y^{BGP} , pero no afecta la tasa de crecimiento de largo plazo.

Esto explica por qué las diferencias en tasas de ahorro pueden explicar diferencias en *niveles* de PIBpc entre países (países que ahorran más son más ricos), pero no diferencias en *tasas de crecimiento* a largo plazo (todos crecen a g_A en la BGP). Para explicar diferencias persistentes en tasas de crecimiento, necesitaríamos diferencias en g_A , lo que requiere endogeneizar el progreso tecnológico (modelos posteriores como Romer o Lucas).

5 La Regla de Oro

Un planificador social quiere elegir la tasa de ahorro s que maximice el consumo per cápita de estado estacionario. El consumo per cápita es:

$$c^* = (1 - s) y^*(s)$$

donde $y^*(s) = A_t (k^{SS})^\alpha$ es el PIBpc de estado estacionario, que depende de s a través de:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Usa los valores: $\alpha = 1/3$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$, $A_t = 5$.

- (a) Escribe c^* explícitamente como función de s (sustituyendo k^{SS} en y^* y luego en c^*).

Solución:

Definimos $n = g_A + g_L + \delta = 0.08$.

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = A_t (k^{SS})^\alpha = A_t \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Con $\alpha = 1/3$: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

$$y^* = 5 \left(\frac{s}{0.08}\right)^{1/2}$$

$$c^*(s) = 5(1-s) \left(\frac{s}{0.08}\right)^{1/2}$$

- (b) Calcula la condición de primer orden $\partial c^*/\partial s = 0$ y demuestra que la tasa de ahorro que maximiza el consumo de estado estacionario es:

$$s^{GR} = \alpha$$

Esta se conoce como la Regla de Oro (*Golden Rule*).

Solución:

En general, con $\beta = \alpha/(1-\alpha)$:

$$c^* = \frac{A_t}{n^\beta} (1-s) s^\beta$$

Condición de primer orden:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \frac{A_t}{n^\beta} [-s^\beta + (1-s) \beta s^{\beta-1}] = \frac{A_t}{n^\beta} s^{\beta-1} [-s + \beta(1-s)] = 0$$

Dado que $\frac{A_t}{n^\beta} s^{\beta-1} > 0$, necesitamos:

$$-s + \beta(1-s) = 0 \implies \beta - s(1+\beta) = 0 \implies s = \frac{\beta}{1+\beta}$$

Sustituyendo $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$:

$$s^{GR} = \frac{\alpha/(1-\alpha)}{1 + \alpha/(1-\alpha)} = \frac{\alpha/(1-\alpha)}{1/(1-\alpha)} = \alpha$$

$$s^{GR} = \alpha$$

- (c) Con $\alpha = 1/3$, calcula el consumo per cápita de estado estacionario para tres escenarios: $s = 0.20$, $s = s^{GR} = 1/3$, y $s = 0.50$. Verifica que s^{GR} efectivamente maximiza el consumo.

Solución:

Usamos $c^*(s) = 5(1-s)(s/0.08)^{1/2}$:

$s = 0.20$:

$$c^* = 5 \times 0.80 \times (2.5)^{1/2} = 4.0 \times 1.581 = 6.32$$

$s = s^{GR} = 1/3 \approx 0.333$:

$$c^* = 5 \times \frac{2}{3} \times (4.167)^{1/2} = 3.333 \times 2.041 = 6.80$$

$s = 0.50$:

$$c^* = 5 \times 0.50 \times (6.25)^{1/2} = 2.5 \times 2.5 = 6.25$$

Tasa de ahorro s	Consumo per cápita c^*
0.20	6.32
1/3 (Regla de Oro)	6.80
0.50	6.25

Efectivamente, $s^{GR} = 1/3$ maximiza el consumo. ✓

- (d) Interpreta económicamente la Regla de Oro: ¿por qué ahorrar más de α reduce el consumo a pesar de aumentar la producción? ¿Qué sacrificio implica el crecimiento económico?

Solución:

La Regla de Oro refleja un trade-off entre producción y consumo:

- Ahorrar más ($s \uparrow$) significa más inversión, más capital, y por tanto mayor producción y^* .
- Pero ahorrar más también significa consumir una fracción menor de esa producción: $c^* = (1-s)y^*$.

Cuando $s < \alpha$, un aumento del ahorro incrementa la producción lo suficiente como para que el consumo suba a pesar de la menor proporción consumida. Cuando $s > \alpha$, los rendimientos decrecientes del capital hacen que el incremento de producción sea insuficiente para compensar la mayor proporción ahorrada: el consumo cae.

El punto óptimo $s^{GR} = \alpha$ equilibra exactamente estos dos efectos. Cuando α es bajo (el capital contribuye poco), conviene ahorrar poco; cuando α es alto, conviene ahorrar más.

El mensaje fundamental es que el crecimiento económico requiere un sacrificio en consumo presente (ahorro $\rightarrow$ inversión), pero existe un límite a partir del cual ahorrar más resulta contraproducente para el bienestar.