

HOJA DE PROBLEMAS 2 — SOLUCIONES

La Trampa Malthusiana

Crecimiento Económico

CUNEF

1 Función de producción y productividad marginal

Considera una economía pre-industrial donde la producción de grano viene dada por:

$$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha}$$

donde Y_t es la producción total, $A_t = B_t X^\alpha$ recoge la tecnología (B_t) y la tierra fija (X), L_t es el trabajo (población), y $\alpha \in (0, 1)$.

Supongamos que $A_t = 10$, $\alpha = 0.5$ y $L_t = 100$.

(a) Calcula la Productividad Marginal del Trabajo (PMgL):

$$\text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}$$

Obtén la expresión general y evalúa numéricamente para los valores dados.

Solución:

Expresión general:

$$\text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = A_t (1 - \alpha) L_t^{-\alpha}$$

Evaluación numérica:

$$\text{PMgL} = 10 \times 0.5 \times 100^{-0.5} = 5 \times \frac{1}{10} = 0.5$$

(b) Demuestra que la PMgL es positiva ($\text{PMgL} > 0$) y decreciente ($\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} < 0$) para cualquier $L_t > 0$.

Solución:

$\text{PMgL} > 0$: Como $A_t > 0$, $(1 - \alpha) > 0$ (ya que $\alpha \in (0, 1)$) y $L_t^{-\alpha} > 0$ para $L_t > 0$, el producto de tres términos positivos es positivo. ✓

PMgL decreciente:

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} = A_t (1 - \alpha) (-\alpha) L_t^{-\alpha-1}$$

Dado que $A_t > 0$, $(1 - \alpha) > 0$, $\alpha > 0$ y $L_t^{-\alpha-1} > 0$, el signo viene determinado por el factor $(-\alpha) < 0$. Por tanto:

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} < 0 \quad \checkmark$$

Cada trabajador adicional produce menos que el anterior (producto marginal decreciente).

- (c) Define la renta per cápita como $y_t = Y_t/L_t$. Obtén la expresión de y_t en función de A_t , L_t y α .

Solución:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t L_t^{1-\alpha}}{L_t} = A_t L_t^{-\alpha}$$

- (d) Demuestra que la renta per cápita es decreciente en la población: $\frac{\partial y_t}{\partial L_t} < 0$. Calcula y_t para $L_t = 100$ y $L_t = 400$. ¿Qué ocurre con el bienestar cuando se cuadruplica la población?

Solución:

$$\frac{\partial y_t}{\partial L_t} = A_t (-\alpha) L_t^{-\alpha-1} < 0 \quad \checkmark$$

ya que $A_t > 0$, $\alpha > 0$ y $L_t^{-\alpha-1} > 0$.

Cálculos numéricos:

$$y(100) = 10 \times 100^{-0.5} = 10 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$y(400) = 10 \times 400^{-0.5} = 10 \times \frac{1}{20} = 0.5$$

Cuando la población se cuadruplica, la renta per cápita se reduce a la mitad. El bienestar cae porque la tierra es fija y los rendimientos del trabajo son decrecientes: más personas comparten el mismo recurso productivo.

2 Dinámica poblacional y estado estacionario

En el modelo malthusiano, la tasa de crecimiento de la población depende de la diferencia entre la renta per cápita y un nivel de subsistencia $\underline{c}$:

$$g_L = z (y_t - \underline{c})$$

donde $z > 0$ es un parámetro de sensibilidad. Recordamos que la renta per cápita es $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$ y que su tasa de crecimiento es:

$$g_y = g_A - \alpha g_L$$

donde g_A es la tasa de crecimiento de la tecnología.

Supongamos $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, y $g_A = 0.01$.

- (a) ¿Qué ocurre con la población si $y_t > \underline{c}$? ¿Y si $y_t < \underline{c}$? ¿Y si $y_t = \underline{c}$? Interpreta económicamente cada caso.

Solución:

- Si $y_t > \underline{c}$: $g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$. La población crece. La renta per cápita está por encima de la subsistencia, lo que permite sostener a más personas (mejor alimentación, menor mortalidad, mayor natalidad).
- Si $y_t < \underline{c}$: $g_L = z(y_t - \underline{c}) < 0$. La población decrece. La renta está por debajo de la subsistencia, causando hambre, enfermedades y mayor mortalidad.
- Si $y_t = \underline{c}$: $g_L = 0$. La población es constante. La economía se encuentra justo en el nivel de subsistencia, en equilibrio demográfico.

- (b) En la senda de crecimiento equilibrado, $g_y = 0$. Usa esta condición junto con la ecuación de g_L para derivar la expresión del PIBpc de largo plazo y^{BGP} en función de g_A , α , z y $\underline{c}$.

Solución:

En la senda de crecimiento equilibrado, $g_y = 0$:

$$g_y = g_A - \alpha g_L = 0 \implies g_L = \frac{g_A}{\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación de dinámica poblacional:

$$\frac{g_A}{\alpha} = z(y^{BGP} - \underline{c})$$

Despejando:

$$y^{BGP} = \frac{g_A}{\alpha z} + \underline{c}$$

- (c) Calcula y^{BGP} con los valores numéricos dados. ¿Cuánto mayor es respecto al nivel de subsistencia?

Solución:

$$y^{BGP} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.02} + 1 = \frac{0.01}{0.01} + 1 = 1 + 1 = 2$$

El PIBpc de largo plazo es $y^{BGP} = 2$, el doble del nivel de subsistencia. Es decir, y^{BGP} supera $\underline{c}$ en 1 unidad, lo cual permite que la población crezca a la tasa $g_L = g_A/\alpha = 0.02$ en la senda de crecimiento equilibrado.

- (d) Sabiendo que en la senda de crecimiento equilibrado $y^{BGP} = A_t L_t^{-\alpha}$, despeja la población compatible con un nivel dado de tecnología:

$$L_t = \left(\frac{A_t}{y^{BGP}} \right)^{1/\alpha}$$

Evalúa esta expresión para $A_t = 10$.

Solución:

Partimos de $y^{BGP} = A_t L_t^{-\alpha}$:

$$\begin{aligned} 2 &= 10 \times L_t^{-0.5} \\ L_t^{-0.5} &= 0.2 \implies L_t^{0.5} = 5 \implies L_t = 25 \end{aligned}$$

Para un nivel tecnológico dado $A_t = 10$, la población compatible con la BGP es $L_t = 25$. Como $g_A > 0$, esta no es una población constante de estado estacionario, sino un punto de la senda de crecimiento equilibrado.

3 Shock tecnológico en el modelo malthusiano

Considera la economía del Ejercicio 2 en estado estacionario con $g_A = 0$ (sin progreso tecnológico), de modo que $y^{SS} = \underline{c}$ y la población es constante.

En el momento $t = 0$ se produce una mejora tecnológica permanente que eleva el nivel de tecnología de A_0 a $A_1 > A_0$, pero la tasa de crecimiento tecnológico sigue siendo $g_A = 0$.

- (a) Inmediatamente tras el shock (antes de que la población se ajuste), ¿qué ocurre con la renta per cápita y_t ? ¿Es mayor, menor o igual que $\underline{c}$?

Solución:

Inmediatamente después del shock, la población L no ha cambiado, pero la tecnología ha aumentado:

$$y_t = A_1 L^{-\alpha} > A_0 L^{-\alpha} = \underline{c}$$

La renta per cápita aumenta por encima del nivel de subsistencia: $y_t > \underline{c}$.

- (b) Dado que $y_t > \underline{c}$, ¿qué predice la ecuación $g_L = z(y_t - \underline{c})$ sobre la evolución de la población?

Solución:

Dado que $y_t > \underline{c}$:

$$g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$$

La población comienza a crecer. Hay más recursos de los necesarios para la subsistencia, lo que permite sostener a más personas.

- (c) A medida que la población crece, ¿qué ocurre con la renta per cápita? Explica el mecanismo económico (relaciona con la productividad marginal decreciente).

Solución:

A medida que L crece, la renta per cápita $y = A_1 L^{-\alpha}$ disminuye, ya que la productividad marginal del trabajo es decreciente. Con tierra fija y más trabajadores, cada persona dispone de menos recursos. La renta per cápita cae progresivamente hacia $\underline{c}$.

- (d) ¿Cuál es el nuevo estado estacionario a largo plazo? Indica los valores de y^{SS} y compara L^{SS} antes y después del shock. ¿Ha mejorado permanentemente el bienestar de la población?

Solución:

Dado que $g_A = 0$ (el nivel cambió, pero no la tasa de crecimiento), el nuevo estado estacionario requiere $g_y = 0$, lo que implica $g_L = 0$, y por tanto:

$$y^{SS} = \underline{c} \quad (\text{igual que antes del shock})$$

La población de estado estacionario cambia:

$$L_{\text{nuevo}}^{SS} = \left(\frac{A_1}{\underline{c}} \right)^{1/\alpha} > \left(\frac{A_0}{\underline{c}} \right)^{1/\alpha} = L_{\text{antiguo}}^{SS}$$

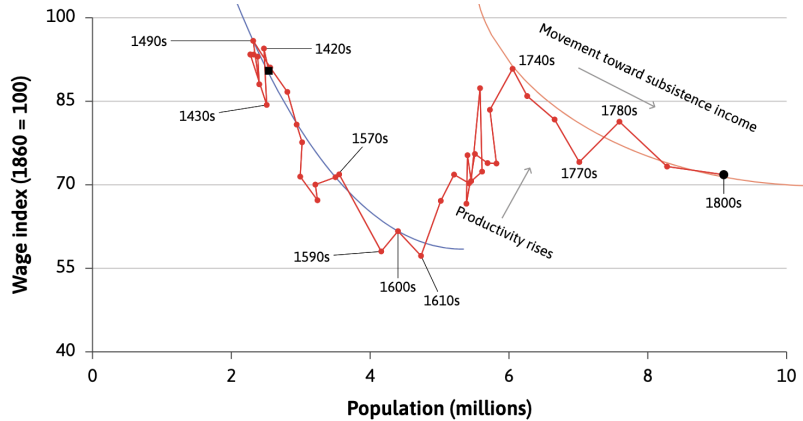
El bienestar no ha mejorado permanentemente: la economía vuelve al mismo nivel de renta de subsistencia $\underline{c}$, pero con una población mayor.

- (e) Explica por qué este mecanismo se denomina “trampa malthusiana”.

Solución:

Es una “trampa” porque cualquier mejora tecnológica que eleve temporalmente el bienestar por encima de la subsistencia desencadena un crecimiento poblacional que erosiona completamente esa ganancia. La economía siempre retorna a $y^{SS} = \underline{c}$: la mejora tecnológica se traduce enteramente en más población, no en mayor bienestar. La sociedad está “atrapada” en el nivel de subsistencia, sin posibilidad de mejorar permanentemente su nivel de vida mediante avances tecnológicos puntuales (solo un crecimiento tecnológico sostenido $g_A > 0$ permite superar $\underline{c}$).

4 Evidencia histórica — Inglaterra 1280–1800



Fuente: CORE

Recuerda que en el modelo malthusiano:

- La renta per cápita depende negativamente de la población: $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$
 - La población crece cuando $y_t > \underline{c}$ y decrece cuando $y_t < \underline{c}$
- (a) Identifica las principales fases históricas que se observan en la figura (al menos cuatro períodos diferenciados).

Solución:

Se distinguen al menos cuatro fases:

1. 1280–1490: La población cae drásticamente (de ~6 a ~3 millones, Peste Negra) y los salarios reales aumentan considerablemente.
 2. ~1500–1610: Los salarios elevados permiten un crecimiento de la población (de ~3 a ~5 millones).
 3. ~1610–1740: Desplazamiento hacia fuera de la relación productividad-población. La población sigue creciendo y la economía puede sostener salarios más altos con la nueva tecnología.
 4. ~1740–1800: Continúa el crecimiento poblacional y el nivel de salario cae hasta el nuevo nivel de equilibrio.
- (b) El período 1280–1490 incluye la Peste Negra (siglo XIV), que redujo drásticamente la población. Usando las ecuaciones del modelo, explica por qué los salarios reales aumentaron durante este período.

Solución:

La Peste Negra redujo drásticamente la población L . Según el modelo, $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$: una caída de L con A constante implica un aumento de y_t . Al haber menos trabajadores compartiendo la misma tierra, cada uno dispone de más recursos, lo que se refleja en salarios reales más altos. Matemáticamente, $\partial y / \partial L < 0$, por lo que una reducción de L incrementa y .

- (c) En el período posterior (aproximadamente 1500–1610), ¿qué ocurrió con la población y los salarios? ¿Es consistente con la predicción del modelo malthusiano? Explica el mecanismo.

Solución:

Con salarios altos ($y_t > \underline{c}$), el modelo predice $g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$: la población crece. Esto es exactamente lo que se observa en la figura. A medida que la población aumenta, los salarios comienzan a disminuir (más trabajadores compiten por la misma tierra, $y = AL^{-\alpha}$ cae). Esto es plenamente consistente con el mecanismo malthusiano: el bienestar por encima de la subsistencia genera crecimiento poblacional, que a su vez erosiona ese bienestar.

- (d) A la vista de la figura completa, ¿dirías que la economía inglesa pre-industrial se comporta de forma consistente con la trampa malthusiana? Justifica tu respuesta.

Solución:

Sí, es notablemente consistente. La figura muestra un patrón cíclico donde:

- Las caídas de población (por shocks exógenos como la peste) elevan los salarios.
- Los salarios altos inducen crecimiento poblacional.
- El crecimiento poblacional reduce los salarios de vuelta hacia el nivel de subsistencia.

Este es exactamente el mecanismo de la trampa malthusiana: la economía oscila en torno al equilibrio de subsistencia, con la relación inversa entre población y salarios como elemento central. La economía inglesa no escapó de esta dinámica hasta la Revolución Industrial (post-1800), cuando el crecimiento tecnológico sostenido ($g_A > 0$ de forma persistente) permitió superar la trampa.

5 Política y crecimiento pre-industrial

En el modelo malthusiano, el PIBpc de largo plazo y la población compatible con un nivel dado de tecnología vienen dados por:

$$y^{BGP} = \frac{g_A}{\alpha z} + \underline{c}, \quad L_t = \left(\frac{A_t}{y^{BGP}} \right)^{1/\alpha}$$

Un gobierno pre-industrial se plantea dos políticas para mejorar el bienestar de largo plazo:

- Política A: Control de la fertilidad, que reduce el parámetro de sensibilidad z .
- Política B: Fomento de la innovación, que aumenta la tasa de crecimiento tecnológico g_A .

Usa los valores de referencia: $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, $g_A = 0.01$, $A = 10$.

- (a) Calcula y^{BGP} y la población compatible con $A_t = 10$.

Solución:

$$y^{BGP} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.02} + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$L_t = \left(\frac{10}{2}\right)^{1/0.5} = 5^2 = 25$$

Es decir, el PIBpc de largo plazo es 2 y, para $A_t = 10$, la población compatible con ese nivel es 25.

- (b) Política A: z baja de 0.02 a 0.01.

Solución:

$$y_A^{BGP} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.01} + 1 = \frac{0.01}{0.005} + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$L_{t,A} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \approx 11.1$$

Sí, el bienestar mejora (y^{BGP} sube de 2 a 3). Para un mismo nivel tecnológico $A_t = 10$, la población compatible cae de 25 a ≈ 11.1 : al reducir la sensibilidad demográfica, la economía soporta menos presión poblacional y alcanza un mayor nivel de renta per cápita.

- (c) Política B: g_A sube de 0.01 a 0.02 (manteniendo $z = 0.02$).

Solución:

$$y_B^{BGP} = \frac{0.02}{0.5 \times 0.02} + 1 = \frac{0.02}{0.01} + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$L_{t,B} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \approx 11.1$$

El bienestar también mejora a $y^{BGP} = 3$. Al evaluar en un momento con $A_t = 10$, la población compatible es la misma (≈ 11.1). Sin embargo, hay una diferencia clave en la dinámica: con Política B, la tasa de crecimiento poblacional en la BGP es $g_L = g_A/\alpha = 0.02/0.5 = 4\%$, frente al 2% en la situación de referencia. La población crece más rápido bajo Política B.

- (d) Comparación.

Solución:

	Referencia	Política A	Política B
y^{BGP}	2	3	3
L_t (cuando $A_t = 10$)	25	11.1	11.1
g_L^{BGP}	2%	2%	4%

Ambas consiguen el mismo aumento de PIBpc de largo plazo ($y^{BGP} = 3$). Para un mismo A_t , también implican la misma población compatible. La diferencia clave es la dinámica poblacional a largo plazo: la Política B genera un crecimiento poblacional el doble de rápido (4% vs. 2%).

La Política A (control de fertilidad) es más eficiente en el sentido de que mejora el bienestar sin acelerar el crecimiento poblacional. La Política B (innovación) también mejora el bienestar, pero requiere mantener un ritmo de innovación más alto de forma permanente para sostener el equilibrio. Si g_A cayera, la economía volvería a un y^{BGP} menor. La recomendación depende del contexto, pero ambas son complementarias.

(e) ¿Qué ocurre si $g_A = 0$?

Solución:

Si $g_A = 0$:

$$y^{BGP} = \frac{0}{\alpha z} + \underline{c} = \underline{c}$$

No es posible alcanzar un PIBpc superior al de subsistencia en el largo plazo. Toda mejora en el nivel de tecnología (A) se absorbe completamente por el crecimiento poblacional, y la economía retorna a $\underline{c}$. Esta es la esencia de la trampa malthusiana: sin crecimiento tecnológico sostenido, la economía está condenada a la subsistencia.